Total number of printed pages–23

3 (Sem–1/CBCS) MAT HG/RC

0135

2021

(Held in 2022)

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Attempt either MAT–HG–1016 ***or*** MAT–HG–1026

For Regular

Attempt MAT–RC–1016

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

OPTION–A

Paper : MAT–HG–1016/MAT–RC–1016

(Calculus)

Full Marks : 80

Time : Three hours

Contd.

1. Answer the following questions : $1\times10=10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Write the domain and range of the function $f(x)=\cos^{-1}x$.

$f(x)=\cos^{-1}x$ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ লিখা।

(b) Find the value of the function $\sin^2\frac{3\pi}{8}$.

ফলন $\sin^2\frac{3\pi}{8}$ ৰ মান উলিওঁৱা।

(c) Find the value of $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{x+3}{x}}$.

$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{x+3}{x}}$ ৰ মান উলিওঁৱা।

(d) State whether the statement is true **or** false :

The function $f(x)=\begin{cases}x^2 & , \ x\le0\\ 1-x & , \ x>0\end{cases}$

is continuous at $x=0$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা ঃ

ফলন $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x \le 0 \\ 1-x & , \quad x > 0 \end{cases}$

$x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(e) What is the nth derivative of e^{ax+b} ?

e^{ax+b} ৰ n-তম অৱকলজটো কি?

(f) Expand $e^{\sin x}$ in powers of x by using Maclaurin's infinite series.

মেক্‌লৰিন'ৰ অসীম শ্ৰেণীটো ব্যৱহাৰ কৰি $e^{\sin x}$ ক x'ৰ ঘাতত প্ৰসাৰ কৰা।

(g) If $f(x)=x(x-1)$, then on what interval the function f is decreasing ?

যদি $f(x)=x(x-1)$ হয়, তেন্তে f ফলনটো কি অন্তৰালত হ্ৰাসমান হ'ব?

(h) State whether the statement is true *or* false :
"Every differentiable function is continuous."
তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা ঃ
"প্ৰত্যেক অৱকলন ফলন অবিচ্ছিন্ন।"

(i) Given a function U that satisfies $1-\frac{x^2}{4} \le U(x) \le 1+\frac{x^2}{2}$ for all $x \ne 0$, find $\lim_{x \to 0} U(x)$.

ফলন U এনে ধৰণে দিয়া আছে, যাতে

$1-\frac{x^2}{4} \le U(x) \le 1+\frac{x^2}{2}$ য'ত সকলো $x \ne 0$

তেন্তে $\lim_{x \to 0} U(x)$ উলিওঁৱা।

(j) State whether the statement is true *or* false :

The slope of the tangent line to the curve $y = x^2 + 4x + 7$ at $x = 1$ is 6.

তলৰ উক্তিটো সচাঁ *নে* মিছা লিখা :

$x = 1$ ত $y = x^2 + 4x + 7$ বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা 6।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Evaluate $\cos\left(\arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

$\cos\left(arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ ৰ মান উলিওঁৱা।

(b) Let $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}+\cos x & \text{if} \quad x\neq 0 \\ 2 & \text{if} \quad x=0 \end{cases}$

Show that $f(x)$ is continuous at $x=0$.

ধৰা হল, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}+\cos x & \text{যদি} \quad x\neq 0 \\ 2 & \text{যদি} \quad x=0 \end{cases}$

দেখুওঁৱা যে $f(x)$, $x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(c) If $y=\sin^{-1}x$, prove that

$$\left(1-x^2\right)y_2-xy_1=0$$

যদি $y=\sin^{-1}x$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(1-x^2\right)y_2-xy_1=0$$

(d) If $u=x^2y+y^2z+z^2x$, then find the value of $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

যদি $u=x^2y+y^2z+z^2x$, তেন্তে

$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\log(1+x)}$$

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If $y = (x^2 - 1)^n$, prove that

$$(x^2 - 1) y_{n+2} + 2x y_{n+1} - n(n+1) y_n = 0.$$

Hence deduce that if $P_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$,

then $\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\} + n(n+1) P_n = 0$

3+2=5

যদি $y = (x^2 - 1)^n$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(x^2 - 1) y_{n+2} + 2x y_{n+1} - n(n+1) y_n = 0$$

ইয়াৰ পৰা সাব্যস্ত কৰা যে, যদি

$P_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$, তেন্তে

$$\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{dP_n}{dx}\right\} + n(n+1) P_n = 0$$

(b) State Rolle's theorem and verify it for the function $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ in $[-3, 0]$. 2+3=5

ৰ'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু সত্যতা f ফলনৰ বাবে $[-3, 0]$ অন্তৰালত পৰীক্ষা কৰা য'ত $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$

(c) Evaluate, using L'Hospital's rule :

এল' হ'চপিতাল নীতি প্ৰয়োগ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$ 5

(d) Using definition find $\frac{\partial u}{\partial x}$ if $u = \log(x^2 + y^2)$. 5

যদি $u = \log(x^2 + y^2)$, তেন্তে সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি $\frac{\partial u}{\partial x}$ ৰ মান উলিওঁৱা।

(e) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, show that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$. 5

যদি $u = log\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$, দেখুওঁৱা যে $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$

(f) Show that the area of triangle ABC is $\frac{1}{2} ab \sin C$. 5

দেখুউৱা যে ABC ত্ৰিভুজৰ ফালি $\frac{1}{2} ab \sin C$

4. Answer ***either*** [(a) and (b)] ***or*** [(c) and (d)]:
[(a) আৰু (b)] *অথবা* [(c) আৰু (d)] অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the value of θ in the mean value theorem

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), 0 < \theta < 1$$

for the function $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ 5

মধ্যমান উপপাদ্যটোত

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), 0 < \theta < 1$$

θ ৰ মান উলিওঁৱা য'ত $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

(b) If $u = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$, prove that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ 5

যদি $u = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

(c) State Euler's theorem on homogeneous function and then verify for the function

$$f(x, y) = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$$ 1+4=5

সুষম ফলনৰ ইউলাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু ইয়াৰ সত্যতা f ফলনৰ বাবে পৰীক্ষা কৰা য'ত

$$f(x, y) = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$$

(d) Prove that (প্ৰমাণ কৰা) ঃ

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0$$ 5

5. Prove that the double limit exist but repeated limits do not exist for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

10

প্ৰমাণ কৰা যে ফলন f ৰ দ্বিসীমা স্থিত হয়, কিন্তু পুনৰাবৃত্তী সীমা স্থিত নহয়, য'ত

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Or/ অথবা

Find infinite series of $log(1+x)$ for $|x|<1$ using Maclaurin's theorem. 10

মেক্লৰিনৰ উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি $log(1+x)$, $|x|<1$ ৰ অসীম শ্ৰেণীটো নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer ***either*** [*(a)* and *(b)*] ***or*** [*(c)* and *(d)*]:
[*(a)* আৰু *(b)*] ***অথবা*** [*(c)* আৰু *(d)*] অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If (যদি) $y=e^{a\sin^{-1}x}$ prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) —

(i) $(1-x^2)y_2-xy_1-a^2y=0$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+a^2)y_n=0$

2+3=5

(b) Show that, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , \quad x\neq0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

is differentiable at $x=0$ and find $f'(0)$.

3+2=5

দেখুউৱা যে, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$
0 , $x = 0$

$x = 0$ বিন্দুত অৱকলন আৰু $f'(0)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) A triangle has sides $a = 3$ units, $b = 4$ units and angle $C = 90°$. Find the length of the side c. 5

এটা ত্ৰিভুজত $a = 3$ একক, $b = 4$ একক আৰু $\angle C = 90°$ । c বাহুৰ দৈৰ্ঘ্যৰ মান উলিওঁৱা।

(d) Evaluate ***any two*** of the following : 2½×2=5

যিকোনো দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \sin x}{3 \cos x}$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x \sec 2x}{3x}$

7. Answer *either* [(*a*) and (*b*)] *or* [(*c*) and (*d*)]:
[(*a*) আৰু (*b*)] *অথবা* [(*c*) আৰু (*d*)] অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(*a*) Prove that (প্ৰমাণ কৰা) ঃ

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{1/3}$$ 6

(*b*) Show that, $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-a|}{x-a} & , \quad x\neq a\\ 1 & , \quad x=a\end{cases}$

is discontinuous at $x=a$. 4

দেখুওৱা যে, $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-a|}{x-a} & , \quad x\neq a\\ 1 & , \quad x=a\end{cases}$

$x=a$ বিন্দুত অনবিচ্ছিন্ন।

(*c*) Show that (দেখুওৱা) ঃ

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \text{ for } x>0$$ 6

(*d*) Consider the function

$f(x)=x^4-4x^3+6$.

Find the function which

(*i*) shifts the graph of *f* two units up;

(*ii*) shifts the graph of *f* one unit to the left;

(iii) stretches the graph of f vertically by a factor 3;

(iv) compresses the graph of f horizontally by a factor 2.

4

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6$ হ'লে, তলৰ ফলন কেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) f ফলনটোৰ লেখটোক ২ একক ওপৰলৈ স্থানান্তৰ কৰা;

(ii) f ফলনটোৰ লেখটোক এক একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা;

(iii) f ফলনটোৰ লেখটোক তিনি গুণ উলম্বভাৱে প্ৰসাৰিত কৰা;

(iv) f ফলনটোৰ লেখটোক দুই গুণ আনুভূমিকভাৱে সংকুচিত কৰা।