

OPTION-B

Paper : MAT-HG-1026

(Honours Generic)

(Analytical Geometry)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(i) Under what condition

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ may represent a pair of parallel straight line ?

কি চৰ্ত সাপেক্ষে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এ এযোৰ পৰস্পৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰে?

(ii) Find the point on the conic

$$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2} \cos \theta$$

whose radius vector is 4.

$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2} \cos \theta$ শাংকৰৰ ওপৰত থকা বিন্দু এটা
নিৰ্ণয় কৰা য'ত ব্যাসাৰ্ধ ভেক্টৰ 4।

(iii) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুক্ত ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(iv) Express the parabola $y^2 = 4ax$ in parametric form.

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটোক প্ৰাচলিক আকাৰত প্ৰকাশ
কৰা।

(v) By what angle the axes are to be rotated to remove the xy -term from the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$?

অক্ষ দুডালক কি কোণত ঘূৰালে

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণটো xy -পদ মুক্ত
হ'ব?

(vi) Define cross product of two vectors.

দুটা ভেক্টৰৰ সদিশ পূৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(vii) Find the centre and radius of the sphere $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

(viii) Find the unit vector that has the same direction as $\vec{u} = 2i + 2j - k$.

$\vec{u} = 2i + 2j - k$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(ix) What is the value of $i \times (i + j + k)$?

$i \times (i + j + k)$ ৰ মান কিমান?

(x) Find parametric equations of the line passing through $(4, 2)$ and parallel to $\vec{v} = (-1, 5)$.

$(4, 2)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা $\vec{v} = (-1, 5)$ ৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the angle between the vectors $\vec{u} = i - 2j + 2k$ and $\vec{v} = -3i + 6j + 2k$.

$\vec{u} = i - 2j + 2k$ আৰু $\vec{v} = -3i + 6j + 2k$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Prove that the equation

$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 = 0$
represents a pair of perpendicular lines.

প্রমাণ কৰা যে

$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 = 0$ এ এযোৰ
পৰম্পৰ লম্বভাৱে থকা সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰে।

- (c) Find the co-ordinates of the focus and the vertex of the parabola

$$y^2 - 4y - 2x - 8 = 0.$$

$y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$ অধিবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু
শীৰ্ষবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) Show that if the polar of P w.r. to an ellipse passes through Q , then the polar of Q passes through P .

দেখুওৱা যে এটা উপবৃত্ত সাপেক্ষে P বিন্দুৰ ধ্বংসীয়
ৰেখাডাল Q বিন্দুৱেদি গ'লে, Q বিন্দুৰ ধ্বংসীয় ৰেখাডালো
 P য়েদি যাব।

- (e) Find the direction cosines of the vector
 $\bar{v} = 2i - 4j + 4k$.

$\bar{v} = 2i - 4j + 4k$ ভেক্টৰটোৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer the following questions : (any four)

$$5 \times 4 = 20$$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো চাৰিটা)

- (a) By a suitable transformation remove the term containing xy from the equation $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$.

এটা যথোপযুক্ত কপান্তৰৰ সহায়ত

$11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$ সমীকৰণটোৰ পৰা xy পদটো বিলোপ কৰা।

- (b) Find a vector that is orthogonal to both of the vectors $\vec{u} = (2, -1, 3)$ and $\vec{v} = (-7, 2, -1)$.

$\vec{u} = (2, -1, 3)$ আৰু $\vec{v} = (-7, 2, -1)$ ভেক্টৰ দুটাৰ উভয়ৰে লম্ব হোৱা ভেক্টৰ এটা নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) The normal at the point $(at_1^2, 2at_1)$ meets the parabola again at the point $(at_2^2, 2at_2)$. Prove that $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$.

$(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুত টনা অভিলম্ব ডালে অধিবৃত্তটোক $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুত সংযোজিত হয়। প্রমাণ কৰা যে,

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$$

- (d) Find the polar equation of a conic in the form $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

এটা শাংকৰৰ ধ্ৰুবীয় সমীকৰণ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$

আকাৰত নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Reduce the equation

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$$

to standard form.

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$$

সমীকৰণটোক আদৰ্শ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(f) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

Answer **either** (a) **or** (b) from each of the following **four** equations :

$$10 \times 4 = 40$$

তলৰ চাৰিটা সমীকৰণৰ প্ৰতিটোৰ (a) অথবা (b) অংশৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) Find the equation of the tangent to the conic

$$4x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x + 5y + 7 = 0$$

at the point (1, -2).

(1, -2) বিন্দুত

$$4x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x + 5y + 7 = 0$$

শাংকৰৰ ওপৰত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Show that a homogeneous equation of second degree in x and y represents a pair of straight lines passing through the origin.

দেখুওৱা যে, x আৰু y ৰ দ্বিঘাতৰ এটা সুসম সমীকৰণে মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এযোৰ সৰলৰেখাক বুজাব?

(b) If by a transformation from one set of rectangular axes to another with the same origin the expression

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

changes to $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2$, then

$$a+b = a'+b' \text{ and } ab - h^2 = a'b' - h'^2.$$

মূলবিন্দু সাপেক্ষে আয়তীয় অক্ষদ্বয়ক ঘূৰালে যদি

$$ax^2 + 2hxy + by^2 \text{ বাশিটো}$$

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 \text{ লৈ পৰিবৰ্তিত হয়,}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে

$$a+b = a'+b' \text{ আৰু } ab - h^2 = a'b' - h'^2.$$

5. (a) (i) Find an equation of the line in 3-space that passes through the points $P(2, 4, -1)$ and $Q(5, 0, 7)$.

$P(2, 4, -1)$ আৰু $Q(5, 0, 7)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Calculate the scalar triple product $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ of the vectors $\bar{u} = 3i - 2j - 5k$, $\bar{v} = i + 4j - 4k$ and $\bar{w} = 3j + 2k$.

$\bar{u} = 3i - 2j - 5k$, $\bar{v} = i + 4j - 4k$ আৰু $\bar{w} = 3j + 2k$ হলে, $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ নির্ণয় কৰা।

(b) (i) Find the area of the triangle that is determined by the points $P(2, 2, 0)$, $Q(-1, 0, 2)$ and $R(0, 4, 3)$.

$P(2, 2, 0)$, $Q(-1, 0, 2)$ আৰু $R(0, 4, 3)$ বিন্দুৰে নির্দেশ কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নির্ণয় কৰা।

(ii) Prove that

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{0}$$

প্রমাণ কৰা যে,

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{0}$$

6. (a) Show that the ortho-centre of the triangle formed by the lines

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ and } lx + my = 1 \text{ is}$$

$$\text{given by } \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{a+b}{am^2 - 2hlm + bm^2}.$$

দেখুওৱা যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ আৰু

$lx + my = 1$ ৰেখাৰে আবৃত ত্ৰিভুজটোৰ পাদিক কেন্দ্ৰ

হ'ল $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{a+b}{am^2 - 2hlm + bm^2}$

(b) Discuss the nature of the conic represented by

$$3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 13y + 8 = 0.$$

$$3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 13y + 8 = 0$$

সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা শাংকৰৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা।

7. (a) (i) Show that the equation of the tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ at the point α is

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha)$$

দেখুওৱা যে $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শাংকৰটোৰ α

বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha)$$

(ii) Obtain the equation of the chord of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$, joining the two points on the conic, whose vectorial angles are $(\alpha + \beta)$ and $(\alpha - \beta)$.

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শাংকৰটোৰ $(\alpha + \beta)$ আৰু $(\alpha - \beta)$ বিন্দু সংযোগী জ্যাৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(b) (i) Find the condition that the line $a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{l}{r}$ may be a normal to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

$a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{l}{r}$ ৰেখাডাল

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শাংকৰৰ অভিলম্ব হোৱাৰ চৰ্ত উলিওৱা।

(ii) Find the polar equation of a circle. এটা বৃত্তৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।