Total number of printed pages–24

3 (Sem–5/CBCS) MAT RE 1/2

2023

MATHEMATICS

(Regular Elective)

Answer the Questions from any one Option.

OPTION–A

Paper : MAT–RE–5016

(Number Theory)

OPTION–B

Paper : MAT–RE–5026

(Discrete Mathematics)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

Contd.

OPTION–A

Paper : MAT–RE–5016

(Number Theory)

1. Choose the correct options : 1×10=10

শুদ্ধ উত্তৰ বাচি উলিওৱা ঃ

(i) Which of the following equations cannot have integer solutions?

তলৰ কোনটো সমীকৰণৰ অখণ্ড সমাধান নাই?

(a) $6x + 51y = 22$

(b) $33x + 14y = 115$

(c) $14x + 35y = 93$

(d) $56x + 72y = 40$

(ii) Which of the following is a Fermat number?

তলৰ কোনটো এটা Fermat সংখ্যা?

(a) 25

(b) 128

(c) 197

(d) 257

(iii) Which one of the following is true for the congruence $6x \equiv 2 \pmod{4}$?

$6x \equiv 2 \pmod{4}$ congruence টোৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ কোনটো সত্য?

(a) There is no solution.
ইয়াৰ কোনো সমাধান নাই।

(b) There are two distinct solutions.
ইয়াৰ দুটা স্বতন্ত্ৰ (distinct) সমাধান আছে।

(c) There are three distinct solutions.
ইয়াৰ তিনিটা স্বতন্ত্ৰ (distinct) সমাধান আছে।

(d) There is only one distinct solution.
ইয়াৰ মাত্ৰ এটা স্বতন্ত্ৰ (distinct) সমাধান আছে।

(iv) The highest power of 7 that divides 150 ! is :

150 ! ক হৰণ কৰিব পৰা 7 ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ব :

(a) 24

(b) 18

(c) 30

(d) 12

(v) Which theorem states that "If p is a prime, then $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$"?

তলৰ কোনটো উপপাদ্য মতে "যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা, তেন্তে $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$"?

(a) Dirichlet's theorem

Dirichletৰ উপপাদ্য

(b) Wilson's theorem

Wilsonৰ উপপাদ্য

(c) Euler's theorem

Eulerৰ উপপাদ্য

(d) Fermat's little theorem

Fermatৰ little উপপাদ্য

(vi) Euler phi-function of 1000 is :

1000ৰ Euler phi-ফলন হ'ব ঃ

(a) 100

(b) 250

(c) 400

(d) 200

(vii) Möbius μ-function of 30 is :

30ৰ Möbius μ-ফলন হ'ব ঃ

(a) 1

(b) −1

(c) 2

(d) 0

(viii) Which of the following sets is a complete residue system modulo m?

তলৰ কোনটো সংহতি modulo mৰ সম্পূৰ্ণ অৱশেষ প্ৰণালী?

(a) $1, 2, \ldots, m-1$

(b) $0, 1, \ldots, m$

(c) $2, 3, \ldots, m+1$

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(ix) Which one of the following statements is true?

তলৰ কোনটো উক্তি সত্য?

(a) If (যদি) $a \equiv b \pmod{m}$,

then (তেন্তে) $(a, m) = (b, m)$.

(b) $a \equiv b \pmod{m}$ iff (যদি আৰু যদিহে)

$(a, m) = (b, m)$.

(c) Both (a) and (b) are true

(a) আৰু (b) দুয়োটাই সত্য

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও সত্য নহয়

(x) The value of $\tau(180)$ is :

$\tau(180)$ৰ মান হ'ব ঃ

(a) 12

(b) 16

(c) 24

(d) 18

2. Answer the following questions : $2\times5=10$

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) If a prime p divides ab, then prove that p divides either a or b.

যদি এটা মৌলিক সংখ্যা p ৰে abক হৰণ যায়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে p ৰে aক অথবা bক হৰণ যাব।

(b) For any positive integer k

(যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা kৰ বাবে)

prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

"If (যদি) $a \equiv b \pmod{n}$,

then (তেন্তে) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$".

(c) If m and n are integers such that

(যদি m আৰু n দুটা অখণ্ড সংখ্যা যাতে)

$gcd(m, n) = 1$

then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(n).$$

(d) Find the highest power of 5 that divide 518!.

518!ক হৰণ কৰিব পৰা 5ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Show that the set of integers $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ is a reduced residue system modulo 15.

দেখুওৱা যে $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো modulo 15 ৰ এটা হ্ৰাসমান অৱশেষ প্ৰণালী।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Prove that there are infinitely many primes.

প্ৰমাণ কৰা যে মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতিটো অসীম।

(b) Prove that $53^{103} + 103^{53}$ is divisible by 39.

প্ৰমাণ কৰা যে $53^{103} + 103^{53}$ক 39 ৰে হৰণ যায়।

(c) Let p be a prime and suppose that $p \nmid a$. Then prove that

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ধৰা হওক p এটা অখণ্ড মৌলিক সংখ্যা আৰু $p \nmid a$. তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

(d) Show that there are no positive integers n satisfying $\sigma(n)=10$.

দেখুওৱা যে $\sigma(n)=10$ ক সিদ্ধ কৰিব পৰা কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নাই।

(e) State and prove the Euler's theorem.

Eulerৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(f) Prove that for the integers $n>1$, the sum of the positive integers less than n and relatively prime to n is $\frac{1}{2}n\phi(n)$.

প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $n>1$ ৰ বাবে n তকৈ সৰু আৰু n ৰ সহ মৌলিক হোৱা অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল হ'ব $\frac{1}{2}n\phi(n)$.

4. Answer ***any four*** of the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ ***যিকোনো চাৰিটাৰ*** উত্তৰ কৰা ঃ

(i) (a) Determine all the positive integer solutions of $5x+3y=52$.

$5x+3y=52$ সমীকৰণটোৰ সকলো ধনাত্মক সমাধান উলিওৱা।

(b) Prove that there are infinitely many primes of the form $4q+3$.

5+5=10

প্ৰমাণ কৰা যে $4q+3$ আকাৰৰ অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে।

(ii) (a) If 2^m+1 is prime, then prove that $m=2^n$ for some integer $n \geq 0$.

যদি 2^m+1 এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে কোনো এটা অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 0$ ৰ বাবে $m=2^n$.

(b) Prove that 41 divides $2^{20}-1$.

5+5=10

প্ৰমাণ কৰা যে $2^{20}-1$, 41 ৰে বিভাজ্য।

(iii) (a) If (যদি) F is a multiplicative function (*F* এটা multiplicative ফলন হয়)

and (আৰু) $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$

then (তেন্তে) prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) f is also a multiplicative function. (*f* নিজেও এটা multiplicaitve ফলন।)

(b) If (যদি) f is a multiplicative function (f এটা multiplicative ফলন হয়) and F is defined by (আৰু Fৰ সংজ্ঞা এনে ধৰণৰ হয় যে)

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

then show that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$F(8.3) = F(8) . F(3).$$

5+5=10

(iv) (a) State and prove the Chinese Remainder theorem.

Chinese Remainder উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(b) Solve the system of congruences.

তলৰ congruence প্ৰণালীটো সমাধান কৰা।

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5}$$
$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

5+5=10

(v) Prove that the function $\mu(n)$ is multiplicative.

প্ৰমাণ কৰা যে $\mu(n)$ ফলনটো এটা multiplicative ফলন।

Also prove that (লগতে প্ৰমাণ কৰা যে).

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

4+6=10

(vi) (a) Find the remainder when 41^{65} is divided by 7.

41^{65} ক 7 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) State and prove the Wilson's theorem.

5+5=10

Wilson ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(vii) (a) If n is a positive integer and p a prime, then prove that the exponent of the highest power of p that divides $n!$ is

যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু p এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $n!$ক হৰণ কৰিব পৰা pৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ব

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

(b) Find the number of zeros that appear at the end in the decimal representation of 158 !

5+5=10

158 !ৰ decimal representationৰ শেষত কিমানটা শূন্য থাকিব নিৰ্ণয় কৰা।

(viii) (a) Prove that for each positive integer $n \geq 1$

যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$ ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

(b) If $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots . p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n \geq 1$

যদি $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots . p_r^{k_r}$, $n \geq 1$ ৰ prime factorization হয়

then prove that

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ldots . \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

5+5=10

OPTION–B

Paper : MAT–RE–5026

(Discrete Mathematics)

1. Give very short answer of the following : 1×10=10

অতি চমু উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Define a poset.

এটা আংশিক ক্ৰমিক সংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) Write when two elements of a poset are called comparable.

কেতিয়া এটা আংশিক ক্ৰমিক সংহতিৰ দুটা মৌল তুলনীয় হয়?

(c) Write when a partially ordered set becomes a total ordered set.

কেতিয়া আংশিক ক্ৰমিক সংহতি এটা সম্পূৰ্ণ ক্ৰমিক সংহতি হব?

(d) Write the absorption law of lattice.

লেটিছ্‌ৰ এবজৰ্বচন নিয়মটো লিখা।

(e) Write when two lattices are called isomorphic.

কেতিয়া দুটা লেটিছ্‌ক আইচ'মৰফিক কোৱা হয়?

(f) Define complement elements in Boolean algebra.

বুলিয়ান এলজেব্ৰাৰ পূৰক মৌলৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) Write De Morgan's laws in Boolean algebra.

বুলিয়ান এলজেব্ৰাৰ ডি মৰ্গানৰ নিয়মটো লিখা।

(h) What is two element Boolean algebra?

দুই-মৌলৰ বুলিয়ান এলজেব্ৰা কি?

(i) Define an ordered set.

এটা ক্ৰমিক সংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(j) Give an example of a contradiction.

এটা বিৰোধ (সদায় মিছা) উক্তিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

2. Give answer of the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Prove that every finite lattice is bounded.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো সীমিত লেটিছ্ পৰিবদ্ধ।

(b) Draw the Hasse diagram for the lattice $(\{1, 3, 6, 12, 24\}, |)$, where $|$ stands for divisibility.

$(\{1, 3, 6, 12, 24\}, |)$ লেটিছ্‌ৰ হেছ্ চিত্ৰ অংকন কৰা, য'ত $|$ এ বিভাজ্যতা বুজায়।

(c) Prove that in a Boolean algebra, if $a = b$ then $ab' + a'b = 0$.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বুলিয়ান এলজেব্ৰাত যদি $a = b$ হয়, তেন্তে $ab' + a'b = 0$ হ'ব।

(d) Draw a diagram for the Boolean expression $(x + y + z)(xy + x'z)$.

বুলিয়ান ৰাশি $(x + y + z)(xy + x'z)$ ক চিত্ৰৰে প্ৰকাশ কৰা।

(e) Draw a diagram of an OR-gate.

OR-গেট এটাৰ চিত্ৰ অংকন কৰা।

3. Give answer of the following : ***(any four)*** 5×4=20

যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Define a distributive lattice. Show that the dual of a distributive lattice is again a distributive lattice. 1+4=5

এটা বিতৰণ লেটিছ্‌ৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে বিতৰণ লেটিছ্ এটাৰ দ্বৈত আকৌ বিতৰণ লেটিছ্ হয়।

(b) B is a Boolean algebra containing 0 and 1. Show that $S = \{0, 1\}$ is a sub algebra of B.

0 আৰু 1 যুক্ত B এটা বুলিয়ান এলজেব্ৰা। দেখুওৱা যে $S = \{0, 1\}$ সংহতিটো Bৰ এটা ছাব-এলজেব্ৰা হ'ব।

(c) Show that the intersection of two sub-algebras of a Boolean algebra is also a sub-algebra.

দেখুওৱা যে এটা বুলিয়ান এলজেব্ৰাৰ দুটা ছাব-এলজেব্ৰাৰ ছেদন পূণৰ এটা ছাব-এলজেব্ৰা হ'ব।

(d) Let $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ and consider the partial order '$\leq$' of divisibility on A. Let $B = P(S)$, the power set of S, where $S = \{a, b, c\}$ be the poset with partial order '$\subseteq$'. Show that $(A, \leq)$ and $(B, \subseteq)$ are isomorphic.

$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ এটা সংহতি আৰু এই সংহতিটোত '$\leq$' হ'ল বিভাজ্যতাৰ এক আংশিক ক্ৰম। ধৰা হ'ল $B = P(S)$ হ'ল Sৰ ঘাত সংহতি য'ত $S = \{a, b, c\}$ হ'ল '$\subseteq$' আংশিক ক্ৰমৰ এক আংশিক ক্ৰমিক সংহতি। দেখুওৱা যে $(A, \leq)$ আৰু $(B, \subseteq)$ আইচ'মৰফিক হ'ব।

(e) Define absorption and idempotent laws of Lattice. Show that the idempotent laws follow from the absorption laws. 1+1+3=5

লেটিছৰ এবজৰপ্চন আৰু আইদেম্পোটেন্ট নিয়মৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে এবজৰপ্চন নিয়মে আইদেম্পোটেন্ট নিয়ম সাব্যস্ত কৰে।

(f) Express $(x+y)(x'+z)$ and x in CNF of three variables x, y, z. 2½+2½=5

$(x+y)(x'+z)$ আৰু xক x, y, z চলক যুক্ত CNFত প্ৰকাশ কৰা।

4. Give answer of the following : ***(any four)*** 10×4=40

যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Define a partial order relation in a set. Examine whether the following relations satisfy all axioms of a partial order relation : 2+4+4=10

(i) A relation ~ on the set of real numbers such as $x \sim y$ if and only if $x^3 - 4x \leq y^3 - 4y$.

(ii) A relation ~ on the set R^2 such as $(a, b) \sim (c, d)$ if and only if $|ab| \geq |cd|$.

এটা সংহতিত আংশিক ক্রম সম্বন্ধৰ সংজ্ঞা দিয়া। তলৰ সম্বন্ধ কেইটাই আংশিক ক্রম সম্বন্ধৰ সকলোবোৰ নিয়ম মানিবনে পৰীক্ষা কৰা ঃ

(i) বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি Rত থকা সম্বন্ধ ~ য'ত $x \sim y$ যদি আৰু যদিহে $x^3 - 4x \le y^3 - 4y$.

(ii) সংহতি R^2 ত থকা সম্বন্ধ ~ য'ত $(a, b) \sim (c, d)$ যদি আৰু যদিহে $|ab| \ge |cd|$.

(b) (i) For any Boolean algebra B, show that

$$(a+b)(b+c)(c+a) = ab + bc + ca$$

for all elements a, b, c of B. 5

দেখুওৱা যে এটা বুলিয়ান এলজেব্রা Bৰ সকলোবোৰ মৌল a, b, cৰ বাবে

$$(a+b)(b+c)(c+a) = ab + bc + ca.$$

(ii) Prove the De Morgan's laws in Boolean algebra. 5

বুলিয়ান এলজেব্রাৰ ডি মৰ্গানৰ নিয়মটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

(c) Express each of the following expressions in DNF in the variables present : 5+5=10

(i) $xyz+(x+y)(x+z)$

(ii) $xy'+y(x'+z)$

তলৰ প্ৰতিটো ৰাশিক তাত থকা চলকবোৰৰ DNF ত প্ৰকাশ কৰা ঃ

(i) $xyz+(x+y)(x+z)$

(ii) $xy'+y(x'+z)$

(d) A committee consisting of three members approves any proposal by majority vote. Each member can approve a proposal by pressing a button attached to their seats. Design a circuit as simple as you can which will allow current to pass when and only when a proposal is approved.

তিনিগৰাকী সদস্যৰ এটা কমিটিৰ প্ৰস্তাববোৰ ভোটৰ জৰিয়তে গ্ৰহণ কৰা হয়। প্ৰতিজন সদস্যই তেওঁলোকৰ আসনত সংযুক্ত বুটাম টিপি একোটা প্ৰস্তাবৰ বাবে নিজৰ ভোট সাব্যস্ত কৰিব পাৰে। যেতিয়াই এটা প্ৰস্তাব গ্ৰহণ হয়, তেতিয়াই বিদ্যুৎ প্ৰবাহিত হ'ব পৰাকৈ এটা সৰল বৰ্তনী অংকন কৰা।

(e) (i) When a Boolean expression is said to be in DNF? Write the complete DNF in three variables x, y, z. Show that a complete DNF is identically 1. 1+1+3=5

কেতিয়া এটা বুলিয়ান ৰাশিক DNF বুলি কোৱা হয়? তিনিটা চলক x, y, z থকা সম্পূর্ণ DNF টো লিখা। প্রমাণ কৰা যে সম্পূর্ণ DNF এটা সদায় 1 ৰ সমতুল্য।

(ii) Express $(x+y+z)\ (xy+x'z)'$ in CNF. 5

$(x+y+z)\ (xy+x'z)'$ ক CNF ত প্রকাশ কৰা।

(f) (i) Let the set of positive integers N be ordered by divisibility. State whether the following subsets are totally ordered and justify your answer :

(a) $\{2, 4, 24\}$

(b) $\{3, 5, 15, 25\}$

(c) $\{3, 15, 45, 90, 360\}$

2+2+2=6

বিভাজ্যতা ক্ৰম সম্বন্ধযুক্ত ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Nৰ বাবে তলৰ উপসংহতি কেইটা সম্পূৰ্ণ ক্ৰমিক সংহতি হবনে লিখা আৰু যুক্তি প্ৰদৰ্শন কৰা।

(a) $\{2, 4, 24\}$

(b) $\{3, 5, 15, 25\}$

(c) $\{3, 15, 45, 90, 360\}$

(ii) Draw the diagrams for the following networks : 2+2=4

(a) $(x+y+z)(xy+x'z)$

(b) $xy+(z'(x'+y))$

ওপৰৰ বৰ্তনীবোৰৰ ছবি অংকন কৰা।

(g) Prove that a non-empty finite poset has

(i) At most one least element.

(ii) At most one greatest element.

5+5=10

প্ৰমাণ কৰা যে এটা অতিৰিক্ত সীমিত আংশিক ক্ৰমিক সংহতিৰ

(i) সৰ্বোচ্চ সংখ্যক এটা লঘিষ্ঠ মৌল থাকে।

(ii) সৰ্বোচ্চ সংখ্যক এটা গৰিষ্ঠ মৌল থাকে।

(h) (i) Define dual of a lattice. Show that dual of a lattice is again a lattice. 1+5=6

লেটিছ্ এটাৰ ডুৱেলৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে লেটিছ্ এটাৰ ডুৱেল পুণৰ এটা লেটিছ্ হব।

(ii) Show that the set L of all factors of 12 under divisibility forms a lattice. Draw its Hasse diagram. 4

দেখুওৱা যে বিভাজ্যতাৰ অধীনত 12ৰ সকলোবোৰ উৎপাদকৰ সংহতি L এটা লেটিছ্ হব। ইয়াৰ হাছী চিত্ৰ এটা অংকন কৰা।