

1 (Sem-5/FYUGP) MAT 46 MN/(A)

2 0 2 5

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT0500604

(Numerical Analysis—I)

(Set—A)

Full Marks : 45

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Using the Gaussian elimination method, perform the first elimination step for the system

$$2x + 3y = 5$$

$$4x + y = 6$$

What multiplier m_{21} is used to eliminate x from the second equation?

গাউচিয়ান নিৰসন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ব্যৱহাৰটোৰ
প্রথম বাদদিয়া পদক্ষেপটোৰ কাৰ্য সম্পাদন কৰা

$$2x + 3y = 5$$

$$4x + y = 6$$

দ্বিতীয় সমীকৰণৰ পৰা x ৰ মান বাদদিবৰ বাবে ব্যৱহৃত
গুণকৰ m_{21} কি, লিখা।

- (b) Solve the following system of equations
using Gauss-Jordan method :

গাউচ-জৰদান পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত সমীকৰণ
ব্যৱহাৰ সমাধান কৰা :

$$2x + y = 5$$

$$x + 3y = 6$$

- (c) Using Newton's divided difference
formula, write the first two terms of the
interpolation polynomial for the points
(0, 1), (1, 3), (2, 7).

নিউটনৰ ভাগকৰা পাৰ্থক্য সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি
(0, 1), (1, 3), (2, 7) বিন্দুবোৰৰ ইণ্টাৰপ'লেচন
পলিনমিয়েলৰ প্রথম দুটা পদ লিখা।

- (d) Use Gregory-Newton forward difference
formula to find the value of y at $x = 1.5$
for the following table :

গ্ৰেগৰী-নিউটনৰ ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেঞ্চ সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি
তলৰ তথ্যৰ পৰা $x = 1.5$ ত y ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

x	:	1	2	3
y	:	2	3	5

(3)

(e) Find an approximate value of $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

চিম্পচনৰ $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ ৰ
প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

2. Answer any *five* of the following questions :

2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো পাঁচটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Solve the system using Gaussian elimination with row changes if necessary :

$$x + 2y = 5$$

$$3x + y = 6$$

Write the augmented matrix after the first step.

প্ৰয়োজন অনুসৰি শাৰী পৰিৱৰ্তন কৰি গাউচিয়ান নিৰসন
ব্যৱহাৰ কৰি ব্যৱস্থাটো সমাধান কৰা :

$$x + 2y = 5$$

$$3x + y = 6$$

প্ৰথম পদক্ষেপৰ পিছত অগমেণ্টেড মেট্ৰিক্সটো লিখা।

(b) For the system

$$2x + 3y = 7$$

$$4x + y = 5$$

find the multiplier used to eliminate x
from the second equation.

(4)

ব্যৱস্থা

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 4x + y &= 5 \end{aligned}$$

বাবে দ্বিতীয় সমীকৰণৰ পৰা x বাদ দিবলৈ ব্যৱহৃত
গুণকটো লিখা।

- (c) Solve the system using Gauss-Jordan method :

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Make the first leading number 1 and then show the matrix after making the first column below it 0.

গাউচ-জৰডান পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ব্যৱস্থাতো
সমাধান কৰা :

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

প্রথম শাৰীটোত আগবঢ়া সংখ্যাটো 1 কৰা আৰু তাৰ
পাছত প্রথম স্তম্ভৰ তলৰ সংখ্যাটো 0 কৰা।

- (d) Using the Jacobi method, find the first values of x and y for the system

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Start with $x = 0$ and $y = 0$.

(5)

জেক্সৰী পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত ব্যৱহাৰটোৰ বাবে
 x আৰু y ৰ প্ৰথম অনুমান উলিওৱা

$$x + y = 3$$

$$x - y = 1$$

য'ত প্ৰাৰম্ভিক মান $x = 0$ আৰু $y = 0$ বুলি ধৰা।

- (e) Using Gauss-Seidel method, calculate the first updated values of x and y for $2x + y = 5$ and $x + 3y = 9$, start with $x = 0$ and $y = 0$.

গাউচ-সাইডেল পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $2x + y = 5$ আৰু
 $x + 3y = 9$ ব্যৱহাৰটোৰ প্ৰথম আপডেট হোৱা মান x
আৰু y নিৰ্ণয় কৰা, য'ত প্ৰাৰম্ভিক মান হ'ল $x = 0$
আৰু $y = 0$.

- (f) A function satisfies $f(0) = 1$, $f(1) = 3$,
 $f(2) = 5$. Using Lagrange interpolation,
find the value of $f(1.5)$.

এটা ফলনৰ মান $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ হ'লে
লেগ্ৰেঞ্জ ইণ্টাৰপ'লেচন ব্যৱহাৰ কৰি $f(1.5)$ ৰ মান
নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) The following data is given :

x	:	0	1	2
$f(x)$	:	1	4	9

Find $f(1.5)$ using the Newton forward
interpolation formula.

দিয়া আছে

x	:	0	1	2
$f(x)$	:	1	4	9

নিউটন ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপ'লেচন ব্যৱহাৰ কৰি $f(1.5)$ ৰ মান উলিওৱা।

- (h) If $f(x) = x^2$, calculate the backward difference $\nabla f(2)$ using $x = 0, 1, 2$.

যদি $f(x) = x^2$ হয়, তেন্তে $x = 0, 1, 2$ লৈ বেকৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স $\nabla f(2)$ নিৰ্ণয় কৰা।

- (i) Using the table

x	:	2	3	4
$f(x)$	:	5	9	15

estimate $f(2.5)$ by Gregory-Newton forward difference interpolation.

দিয়া আছে

x	:	2	3	4
$f(x)$	:	5	9	15

গ্ৰেগৰী-নিউটন ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স ইণ্টাৰপ'লেচন ব্যৱহাৰ কৰি $f(2.5)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) Evaluate $\int_1^3 (2x+1) dx$ using the Trapezoidal rule with $h = 1$.

ট্ৰেপিজয়ডাল নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি $h = 1$ ত $\int_1^3 (2x+1) dx$ ৰ মান উলিওৱা।

3. Answer any four of the following questions :

5×4=20

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) The table below shows values of a function :

তলৰ ফলনৰ মানৰ টেবুল দিয়া হৈছে :

x	:	1	2	3
$f(x)$	:	1	4	9

(i) Construct the Lagrange's interpolation polynomial.

লেগ্ৰেঞ্জ ইণ্টাৰপ'লেচন পলিনমিয়েল গঠন কৰা।

(ii) Use it to estimate $f(2.5)$.

এই পলিনমিয়েল ব্যৱহাৰ কৰি $f(2.5)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Given

দিয়া আছে

x	:	0	1	2	3
$f(x)$	:	1	8	27	64

(i) Form the Newton forward interpolation formula.

নিউটন ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপ'লেচন সূত্ৰটো গঠন কৰা।

(ii) Estimate $f(1.5)$.

$f(1.5)$ ৰ মান উলিওৱা।

- (c) Given $f(x) = x^2$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$.
Compute the first and second forward and backward difference at $x=1$ and $x=4$.

যদি $f(x) = x^2$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$ হয়, তেজ্জে $x=1$ আৰু $x=4$ ত প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় ফৰৱাৰ্ড আৰু বেকৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স গণনা কৰা।

- (d) A small factory records the number of items produced by a machine every hour as shown below :

Hour (x)	:	0	1	2	3
Items produced $f(x)$	:	10	18	30	46

- (i) Using the Gregory-Newton forward difference method, estimate how many items were produced at 1.5 hours.

- (ii) Show all steps using the forward difference table.

এটা সৰু কাৰখানাই ষড়্জটোৰে প্ৰতি ঘণ্টা কিমান বস্তু উৎপাদন কৰিছে সেইটো তলত দিয়া ধৰণে লিখি ৰাখিছে :

ঘণ্টা (x)	:	0	1	2	3
উৎপাদিত বস্তু $f(x)$	:	10	18	30	46

(i) শ্ৰেণী-নিউটন ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি 1.5 ঘণ্টাত কিমান উৎপাদন হৈছে অনুমান কৰা।

(ii) ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স টেবুল মতে ইয়াৰ প্ৰত্যেকটো ধাপ দেখুওৱা।

(e) A small fruit seller records price of mangos on different days of the week as follows :

Day (x)	:	1	2	3	4
Price (per kg) f(x)	:	20	22	19	25

(i) Construct piecewise linear polynomials between each consecutive day.

(ii) Using these polynomials, estimate the price per kg of mangos on day 2.5 and day 3.5

এটা সৰু ফল বিক্ৰেতাৰ সপ্তাহৰ বিভিন্ন দিনত আমৰ প্ৰতিটো কে. জি. তলত দিয়া ধৰণে লিখি ৰাখিছে :

দিন (x)	:	1	2	3	4
মূল্য (প্ৰতি কে. জি.) f(x)	:	20	22	19	25

(i) প্ৰতিটো পৰৱৰ্তী দিনৰ বাবে অংশভাগীয় বৈখিক পলিনমিয়েল লিখা।

(ii) এই পলিনমিয়েল ব্যৱহাৰ কৰি 2.5 দিনত আৰু 3.5 দিনত আমৰ প্ৰতি কে. জি. মূল্য লিখা।

- (f) Apply the Trapezoidal rule and Simpson's $\frac{1}{3}$ rule to approximate

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

using two sub-intervals ($n = 2$).

Trapezoidal rule আৰু Simpson's $\frac{1}{3}$ rule ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া সমাকলনৰ মান উলিওৱা :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

য'ত দুটা উপঅন্তৰাল ($n = 2$) ব্যৱহাৰ কৰা।

- (g) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

using Euler's method with step size $h = 0.1$ to find the value of $y(0.1)$ and $y(0.2)$.

Euler's method (step size $h = 0.1$) ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণ সমাধান কৰা আৰু $y(0.1)$ আৰু $y(0.2)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

- (h) The integral $I = \int_0^2 e^{-x} dx$ is approximated using the trapezoidal rule with step sizes $h = 1$ and $h = 0.5$. Use Richardson extrapolation to improve the accuracy of the result.

সমাকলন $I = \int_0^2 e^{-x} dx$ ত Trapezoidal rule ব্যৱহাৰ কৰি $h = 1$ আৰু $h = 0.5$ ত মান গণনা কৰা। এই দুয়োটা মান ব্যৱহাৰ কৰি Richardson extrapolation ৰ সহায়ত অধিক শুদ্ধকৈ নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer any *one* of the following questions : 10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো এটাৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Use both Jacobi method and Gauss-Seidel method to solve the following system of linear equations up to three iterations :

$$4x + y + z = 7$$

$$x + 5y + 2z = -8$$

$$2x + y + 6z = 6$$

- (i) Write the iteration formulas for Jacobi and Gauss-Seidel methods.
- (ii) Perform three iterations using each method.
- (iii) Compare the approximate values (x, y, z) obtained from both methods.
- (iv) Comment on which method converges faster based on your results.

Jacobi method আৰু Gauss-Seidel method ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ বৈখিক সমীকৰণ তিনিটা iteration লৈ সমাধান কৰা :

$$4x + y + z = 7$$

$$x + 5y + 2z = -8$$

$$2x + y + 6z = 6$$

(i) Jacobi আৰু Gauss-Seidel পদ্ধতিত ব্যৱহাৰ হোৱা iteration formula লিখা।

(ii) প্রতিটো পদ্ধতিত তিনিটো iteration ৰ মান উলিওৱা।

(iii) দুয়োটা পদ্ধতিত পোৱা প্ৰায়মানসমূহ (x, y, z) তুলনা কৰা।

(iv) পোৱা ফলাফলৰ ভিত্তিত কোন পদ্ধতিত দ্ৰুতভাৱে converge কৰে সেই বিষয়ে লিখা।

(b) Using the Lagrange interpolation formula, estimate the value of $f(2.5)$ from the following data :

x	:	1	2	3	4
$f(x)$	:	1	4	9	16

Steps :

(i) Write the general Lagrange interpolation formula.

(ii) Construct the Lagrange's polynomial using the given data.

(iii) Use the polynomial to compute $f(2.5)$.

(iv) Comment on whether the result matches the expected behaviour of the function.

Lagrange interpolation formula ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ তথ্যৰ পৰা $f(2.5)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

x	:	1	2	3	4
$f(x)$	:	1	4	9	16

ধাপসমূহ :

(i) সাধাৰণ Lagrange interpolation formula লিখা।

(ii) দিয়া তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি Lagrange's polynomial গঠন কৰা।

(iii) Polynomial ব্যৱহাৰ কৰি $f(2.5)$ ৰ মান উলিওৱা।

(iv) ফলাফলটো কি ফলনৰ ব্যৱহাৰৰ সৈতে মিল খায় নে নাই মন্তব্য কৰা।

(c) The rate of change of a population $P(t)$ is given by the differential equation

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P$$

with initial condition $P(0) = 100$. Use Euler's method with a step size $\Delta t = 0.2$ to approximate the population at $t = 0.4$.

যদি জনসংখ্যাৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ $P(t)$, তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণৰে দিয়া হৈছে

$$\frac{dP}{dt} = 0.5P$$

প্ৰাৰম্ভিক অৱস্থা $P(0) = 100$. Euler পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ধাপৰ মান $\Delta t = 0.2$ লৈ $t = 0.4$ সময়ত জনসংখ্যাৰ প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) The displacement $x(t)$ of a particle at different times is given below :

$t(s)$:	0	1	2	3	4
$x(m)$:	0	2	8	18	32

Find :

- (i) Use the forward difference formula to approximate the first derivative $\frac{dx}{dt}$ at $t = 1$ and $t = 2$.
- (ii) Use the central difference formula to approximate the second derivative $\frac{d^2x}{dt^2}$ at $t = 2$.

এটা কণাৰ স্থানান্তৰ $x(t)$ তলত দিয়া সময়ত দিয়া হৈছে :

$t(s)$:	0	1	2	3	4
$x(m)$:	0	2	8	18	32

মান নির্ণয় কৰা :

(i) Forward difference formula ব্যৱহাৰ
কৰি $t=1$ আৰু $t=2$ ত প্ৰথম প্ৰকাৰৰ অন্তৰক
 $\frac{dx}{dt}$ প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Central difference formula ব্যৱহাৰ
কৰি $t=2$ ত দ্বিতীয় প্ৰকাৰৰ অন্তৰক $\frac{d^2x}{dt^2}$
প্ৰায়মান নিৰ্ণয় কৰা।
