

1 (Sem-5/FYUGP) MAT 46 MN/(B)

2 0 2 5

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT0500604

(Numerical Analysis—I)

(Set-B)

Full Marks : 45

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলৰ প্রশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Write the first step to eliminate x from the second equation in the following system by Gaussian elimination method :

নিম্নলিখিত সমীকৰণসমূহত Gaussian elimination পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি দ্বিতীয় সমীকৰণৰ পৰা x নোহোৱা কৰাৰ প্ৰথম পদক্ষেপটো লিখা :

$$x + y = 5$$

$$2x + 3y = 8$$

(b) State one condition required for the Gauss-Seidel method to converge.

Gauss-Seidel পদ্ধতি কনভাৰ্জ কৰিবলৈ কোনটো চৰ্ত পূৰণ কৰিব লাগিব ?

- (c) State the general form of Newton's forward interpolation formula.

Newtonৰ ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন ফৰ্মুলাৰ সাধাৰণ ৰূপটো উল্লেখ কৰা।

- (d) State the formula of the trapezoidal rule for numerical integration.

সংখ্যাাত্মক সমাকলনত trapezoidal ruleৰ সূত্ৰটো উল্লেখ কৰা।

- (e) State the formula of Simpson's $\frac{1}{3}$ rule for numerical integration.

সংখ্যাাত্মক সমাকলনত Simpson's $\frac{1}{3}$ ruleৰ সূত্ৰটো লিখা।

2. Answer any *five* of the following questions :

$$2 \times 5 = 10$$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো পাঁচটাৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Solve the following system of equations using one step of Gauss-Jordan elimination :

Gauss-Jordan এলিমিনেচনৰ এটা পদক্ষেপ ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত সমীকৰণ দুটাৰ সমাধান কৰা :

$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 9$$

Write the new augmented matrix after the first row operation.

প্ৰথম শাৰী প্ৰচলনৰ পাছত নতুন augmented matrixটো লিখা।

- (b) Use one step of the Jacobi method to solve the following system of equations. Start with $x=0$ and $y=0$:

নিম্নলিখিত সমীকৰণসমূহৰ পৰা Jacobi পদ্ধতিৰে এটা পদক্ষেপ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা। প্ৰাৰম্ভিক মান হিচাপে $x=0$ আৰু $y=0$ বুলি ধৰা :

$$\begin{aligned}x+y &= 5 \\ 2x+3y &= 12\end{aligned}$$

Find the new values of x and y after the first step.

প্ৰথম পদক্ষেপৰ পাছত x আৰু y ৰ নতুন মান লিখা।

- (c) Use one step of the Gauss-Seidel method to solve the following system of equations. Start with $x=0$ and $y=0$:

নিম্নলিখিত সমীকৰণসমূহৰ পৰা Gauss-Seidel পদ্ধতিৰে এটা পদক্ষেপ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা। প্ৰাৰম্ভিক মান হিচাপে $x=0$ আৰু $y=0$ বুলি ধৰা :

$$\begin{aligned}x+y &= 4 \\ 2x+3y &= 9\end{aligned}$$

Find the new values of x and y after the first step.

প্ৰথম পদক্ষেপৰ পাছত x আৰু y ৰ নতুন মান লিখা।

- (d) Using Lagrange interpolation formula, find the interpolating polynomial for the following data :

Lagrange interpolation সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ তথ্য অনুযায়ী interpolating polynomialটো নিৰ্ণয় কৰা :

$x :$	1	2	4
$f(x) :$	3	6	12

Write only Lagrange formula.

কেৱল Lagrange সূত্ৰটো লিখা।

- (e) For the following table, compute the forward difference of Δf_0 and $\Delta^2 f_0$:

তলত দিয়া টেবুলৰ বাবে Δf_0 আৰু $\Delta^2 f_0$ ৰ forward difference নিৰ্ণয় কৰা :

$x :$	0	1	2
$f(x) :$	4	7	12

- (f) Using the Lagrange interpolation formula, construct the interpolating polynomial for the points $(x, y) = (1, 2), (2, 3)$.

Lagrange interpolation সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি $(x, y) = (1, 2), (2, 3)$ ৰ বাবে interpolating পলিনমিয়েল গঠন কৰা।

- (g) Approximate the integral $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ using the trapezoidal rule with four equal sub-intervals.

$\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ ৰ মান চাৰিটা সমান অন্তৰাল ব্যৱহাৰ কৰি trapezoidal rule অনুসৰি প্ৰায়মানভাৱে উলিওৱা।

- (h) Use Simpson's $\frac{1}{3}$ rule to estimate $\int_0^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$ with step size $h = 1$.

Simpsonৰ $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত ধাপৰ মান $h = 1$ ধৰা।

- (i) Given the approximations $I(h) = 1.728$ and $I\left(\frac{h}{2}\right) = 1.742$ for an integral. Use

Richardson extrapolation to find a more accurate estimate of the integral.

দিয়া আছে এটা সমাকলনৰ প্ৰায়মান $I(h) = 1.728$ আৰু $I\left(\frac{h}{2}\right) = 1.742$. Richardson extra-

polygon ব্যৱহাৰ কৰি সমাকলনৰ অধিক সঠিক মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) Form the Newton forward interpolation polynomial using the following data :

তলত দিয়া তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি নিউটন ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেছন পলিনমিয়েল গঠন কৰা :

$x :$	0	1	2
$f(x) :$	1	2	4

3. Answer any four of the following questions :

$5 \times 4 = 20$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Solve the following system of linear equations using

তলত দিয়া বৈখিক সমীকৰণবোৰ নিম্ন উল্লেখিত পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা :

(i) Gaussian elimination with row operations;

গাউছিয়ান এলিমিনেচন পদ্ধতিত শাৰি অপাৰেচন ব্যৱহাৰ কৰি

(ii) Gauss-Jordan method :

গাউছ-জৰ্ডান পদ্ধতিৰ সহায়ত

$$2x + 3y - z = 5$$

$$4x + y + 2z = 6$$

$$-2x + 5y + z = 3$$

Find the values of x, y, z using both methods.

উভয় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি x, y, z ৰ মান উলিওৱা।

(b) Use iterative method (Gauss-Seidel) to find one iteration of the solution for the following system of equations :

তলৰ সমীকৰণকেইটাৰ বাবে ইটাৰেচিড পদ্ধতি (Gauss-Seidel) ব্যৱহাৰ কৰি সমাধানৰ এটা ইটাৰেচন উলিওৱা :

$$10x + y + z = 12$$

$$2x + 10y + z = 13$$

$$2x + y + 10z = 14$$

Take initial approximations as

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Compute $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$.

আৰম্ভণিৰ অনুমান হিচাবে

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

বুলি লোৱা আৰু $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ ৰ মান গণনা কৰা।

- (c) Use the Jacobi iterative method to find one iteration of the solution for the following system of equations :

তলৰ সমীকৰণকেইটাৰ বাবে Jacobi ইটাৰেটিভ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধানৰ এখন ইটাৰেশ্বন উলিওৱা :

$$5x + y + z = 7$$

$$x + 6y + z = 8$$

$$x + y + 7z = 9$$

Take initial approximations as

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Compute $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$.

আৰম্ভণিৰ অনুমান হিচাবে

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

বুলি লোৱা আৰু $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ ৰ মান গণনা কৰা।

- (d) Using the data given below, find the value of $f(3)$ by

তলত দিয়া তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত পদ্ধতিৰে $f(3)$ ৰ মান উলিওৱা :

- (i) Lagrange interpolation formula;

লেগ্ৰেঞ্জ ইণ্টাৰপলেচন ফৰ্মুলা

- (ii) Newton's forward interpolation formula :

নিউটনৰ ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন ফৰ্মুলা

$$x : 1 \quad 2 \quad 4$$

$$f(x) : 1 \quad 4 \quad 16$$

Use above data and show all steps clearly.

উপৰোক্ত তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি সকলো ধাপ স্পষ্টকৈ উলিওৱা।

- (e) Using the Gregory-Newton forward interpolation formula, find the value of $f(2.5)$ from the following table :

Gregory-Newton ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া টেবুলৰ পৰা $f(2.5)$ মান উলিওৱা :

x :	2	3	4	5
$f(x)$:	8	27	64	125

Show all steps clearly.

সকলো ধাপ স্পষ্টভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰা।

- (f) Use Simpson's $\frac{1}{3}$ rule to approximate the value of the integral

Simpsonৰ $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি সমাকলনৰ মান প্ৰায়মানভাৱে নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_0^3 (x^2 + 3) dx$$

The values of the function at equal intervals of $h=1$ are given below :

$h=1$ ৰ সমান অন্তৰালত দিয়া থকা ফলনৰ মানসমূহ তলত দিয়া হৈছে :

x :	0	1	2	3
$f(x) = x^2 + 3$:	3	4	7	12

Evaluate the integral using Simpson's rule.

Simpsonৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি সমাকলনটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Use Euler's method to approximate the value of $y(0.2)$ for the differential equation

Euler পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণৰ বাবে $y(0.2)$ ৰ মান প্ৰায়মানভাৱে নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

With the initial condition $y(0) = 1$, take step size $h = 0.1$. Perform the calculation for two steps to find $y(0.2)$.

প্ৰাৰম্ভিক অৱস্থা $y(0) = 1$ লৈ $h = 0.1$ পদক্ষেপ মাপ লোৱা আৰু $y(0.2)$ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ দুটা পদক্ষেপত গণনা কৰা।

- (h) Use the trapezoidal rule to calculate the approximate value of the integral $\int_1^3 (2x+1) dx$. The function values at equal intervals of $h=1$ are given below :

Trapezoidal rule ব্যৱহাৰ কৰি $\int_1^3 (2x+1) dx$ ৰ প্ৰায়মান উলিওৱা। $h=1$ ৰ সমান অন্তৰালত ফলনৰ মানসমূহ তলত দিয়া হৈছে :

x :	1	2	3
$f(x) = 2x+1$:	3	5	7

4. Answer any one of the following questions : 10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Use the Gauss-Seidel iterative method to find the solution of the following system of equations up to three iterations :

Gauss-Seidel iterative method ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া সমীকৰণ ব্যৱহাৰ সমাধান তিনিটা ইটাৰেশ্বন লৈ উলিওৱা :

$$10x + 2y + z = 14$$

$$2x + 10y + 3z = 15$$

$$x + y + 10z = 12$$

Take the initial approximations as

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Compute $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, $(x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)})$.

আৰম্ভণিৰ অনুমান হিচাবে $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ বুলি লোৱা আৰু

$(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, $(x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)})$ ৰ

মান গণনা কৰা।

- (b) Using the Gregory-Newton backward interpolation formula, find the value of $f(9.5)$ from the following table :

গ্ৰেগৰী-নিউটন বেকৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া মানৰ বাবে $f(9.5)$ ৰ মান উলিওৱা :

x	:	6	7	8	9	10
$f(x)$	:	12	20	30	42	56

Construct the backward difference table and evaluate $f(9.5)$ using the formula.

বেকৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স টেবুল গঠন কৰা আৰু সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি $f(9.5)$ ৰ মান উলিওৱা।

- (c) The following table shows the temperature (in $^{\circ}\text{C}$) recorded at different times of the day :

তলত দিয়া সময় অনুসৰি দিনৰ তাপমাত্ৰা ($^{\circ}\text{C}$)ৰ তথ্য দিয়া হৈছে :

Time (hour) : 0 2 4 6
সময় (ঘণ্টা)

Temperature ($^{\circ}\text{C}$) : 15 17 21 30
তাপমাত্ৰা ($^{\circ}\text{C}$)

- (i) Use piecewise linear interpolation to estimate the temperature at 3 hours.

Piecewise linear interpolation ব্যৱহাৰ কৰি 3 ঘণ্টাৰ তাপমাত্ৰা অনুমান কৰা।

- (ii) Use piecewise quadratic interpolation (consider two consecutive intervals at a time) to estimate the temperature at 5 hours.

Piecewise quadratic interpolation ব্যৱহাৰ কৰি (একই সময়ত দুটা পৰৱৰ্তী অন্তৰাল ধৰি) 5 ঘণ্টাৰ তাপমাত্ৰা অনুমান কৰা।

- (iii) Plot the piecewise linear interpolation function for the given data.

দিয়া তথ্যৰ বাবে piecewise linear interpolation ফলনৰ গ্ৰাফ আঁকা।

(d) Consider the function

ধৰা হ'ল ফলন

$$f(x) = e^{-x^2}$$

- (i) Using Richardson extrapolation, improve the estimate of the derivative $f'(0)$ using the forward difference formula with step sizes $h = 0.1$ and $h = 0.5$.

Richardson extrapolation ব্যৱহাৰ কৰি ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স সূত্ৰৰ সৈতে $h = 0.1$ আৰু $h = 0.5$ ধাপ ব্যৱহাৰ কৰি $f'(0)$ ৰ অনুমান কৰা।

- (ii) Using Romberg integration, estimate the integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ to the second-order Romberg table. Show all steps clearly.

Romberg integration ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ৰ অনুমান কৰা, দ্বিতীয় অৰ্ডাৰ Romberg টেবুললৈকে। সকলো ধাপ স্পষ্টকৈ দেখুওৱা।

★ ★ ★