Total number of printed pages–12

3 (Sem–6) MAT 1

2020

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Write the answers of the following questions : $1\times10=10$

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰবোৰ লিখা ঃ

(a) Is the set $\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ linearly independent ?

$\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়নে ?

Contd.

(b) State whether $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is an elementary matrix or not.

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটো প্ৰাথমিক মৌলকক্ষ হয়নে নহয় উল্লেখ কৰা।

(c) Is the union of two subspaces of a vector space always a subspace?

এখন সদিশ স্থানৰ দুখন উপ-সদিশ স্থানৰ মিলন সদায়ে এখন উপ-সদিশ স্থান হয়নে ?

(d) Define conjugate functions.

সংযুগ্ম ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Can the set $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ be a basis for $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$?

$\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ সংহতিটো $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ ৰ ভূমি হ'ব পাৰেনে ?

(f) Write the Cauchy-Riemann Equations in Polar form.

ধ্ৰুৱীয় আকাৰত ক'ছি-ৰিমানৰ সমীকৰণসমূহ লিখা।

(g) Mention the rank of the matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ কোটি উল্লেখ কৰা।

(h) Is the function $f(x) = 3x + 2$ a linear transformation from R to R ?

$f(x) = 3x + 2$ ফলনটো R-ৰ পৰা R লৈ এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰণ হয়নে ?

(i) Write the eigenvalues of $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ আইগেন মানবোৰ লিখা।

(j) If S is a subset of a vector space $V(F)$, then $L(L(S)) = ?$

যদি S এখন সদিশ স্থান $V(F)$ৰ উপসংহতি হয়, তেন্তে $L(L(S)) = ?$

2. Answer ***any two*** parts of the following : 2×2=4

তলৰ *যিকোনো দুটা* অংশৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Prove that a set containing the zero vector is linearly dependent.

প্ৰমাণ কৰা যে শূন্য ভেক্টৰ অন্তৰ্ভুক্ত হৈ থকা সংহতি এটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

(b) Prove that $U = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ is a subspace of the vector space $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

প্ৰমাণ কৰা যে $U = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ সংহতিটো $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ সদিশ স্থানৰ উপ-সদিশ স্থান হয়।

(c) If $f : U(F) \to V(F)$ be a linear transformation and $0, 0'$ are zero vectors in $U(F)$ and $V(F)$ respectively, then show that $f(0) = 0'$.

যদি $f: U(F) \to V(F)$ এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰণ আৰু $0, 0'$ ক্ৰমে $U(F)$আৰু $V(F)$ৰ শূন্য ভেক্টৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f(0) = 0'$ ।

3. Answer ***any three*** of the following: $2\times3=6$

নিম্নোক্তবোৰৰ *যিকোনো তিনিটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Show that the function

$$u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$$

is harmonic.

দেখুওৱা যে $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ ফলনটো এটা হৰাত্মক ফলন।

(b) If $f(z) = 3z^2 + 2z$, then prove that

$$\underset{z \to z_0}{Lt} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 6z_0 + 2$$

যদি $f(z) = 3z^2 + 2z$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\underset{z \to z_0}{Lt} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 6z_0 + 2$$

(c) Show that:

দেখুওৱা যে ঃ

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(d) For any two complex numbers z_1 and z_2, prove that $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

যিকোনো দুটা জটিল সংখ্যা z_1 আৰু z_2-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

4. Answer ***any four*** parts : 5×4=20

চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Prove that the intersection of an arbitrary collection of subspaces of a vector space is again a subspace of the space.

প্ৰমাণ কৰা যে এখন সদিশ স্থানৰ যিকোনো সংখ্যক উপ-সদিশ স্থানৰ ছেদন এখন উপ-সদিশ স্থান।

(b) Show that any subset of a linearly independent subset of a vector space is always linearly independent.

দেখুওৱা যে এখন সদিশ স্থানৰ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ উপসংহতি এটাৰ যিকোনো উপসংহতি সদায়ে ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(c) Examine whether the vectors (1, 0, 0), (1, 1, 0) and (1, 1, 1) form a basis for $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) ভেক্টৰকেইটাই $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ ৰ এটা ভূমি গঠন কৰেনে পৰীক্ষা কৰা।

(d) If W_1 and W_2 are two subspaces of $V(F)$, then prove that $W_1 + W_2$ is again a subspace of $V(F)$.

যদি W_1 আৰু W_2 এখন সদিশ স্থান $V(F)$ৰ উপ-সদিশ স্থান হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $W_1 + W_2$-ও $V(F)$-ৰ উপ-সদিশ স্থান হ'ব।

(e) Prove that every set of $(n+1)$ or more vectors of a finite dimensional vector space $V(F)$ of dimension n is linearly dependent.

প্ৰমাণ কৰা যে n-বীমীয় সদিশ স্থান এখনৰ $(n+1)$ বা ততোধিক ভেক্টৰেৰে গঠিত সংহতি এটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

(f) Show that the mapping $f : R^3(R) \to R^2(R)$ defined by $f(a, b, c) = (a, b)$, is a linear transformation from $R^3(R)$ onto $R^2(R)$.

দেখুওৱা যে $f : R^3(R) \to R^2(R)$ যাতে $f(a, b, c) = (a, b)$ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ ফলনটো এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰণ।

5. Answer ***any two*** of the following questions : 5×2=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নসমূহৰ *যিকোনো দুটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Prove that $f(z) = z^2 - 2z + 5$ is continuous everywhere in the finite plane.

প্ৰমাণ কৰা যে $f(z) = z^2 - 2z + 5$ ফলনটো সসীম সমতলৰ সকলো বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(b) Evaluate $\int_C \frac{dz}{z-a}$, where C represents the circle $|z-a| = r$.

$\int_C \frac{dz}{z-a}$ ৰ মান উলিওৱা য'ত C-য়ে $|z-a| = r$ বৃত্তক নিৰ্দ্দেশ কৰে।

(c) Using the result

$$f^{(n)}(a) = \frac{\lfloor n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

prove that $\oint_C \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4} = \frac{8\pi i}{3e^2}$

where C is the circle $|z| = 3$.

C য়ে $|z| = 3$ বৃত্তটোক বুজালে

$$f^{(n)}(a) = \frac{\lfloor n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

ফলটিৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\oint_C \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

6. State Cayley-Hamilton theorem. Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

satisfies Cayley-Hamilton theorem.

1+9=10

কেলি-হেমিল্টনৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা। দেখুওৱা যে

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষটোৱে কেলি- হেমিল্টন উপপাদ্যটো সিদ্ধ কৰে।

Or/অথবা

Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix A where

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ 4+6=10

A মৌলকক্ষটোৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ উলিওৱা য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Find the analytic function $w = u + iv$, where $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Further show that the function u is harmonic. 7+3=10

বৈশ্লেষিক ফলন $w = u + iv$ নিৰ্ণয় কৰা য'ত $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$। ইয়াৰোপৰি দেখুওৱা যে u ফলনটো এটা হৰাত্মক ফলন।

Or/অথবা

If $f(z)$ is analytic inside and on the boundary C of a simply-connected region R, then prove that

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{z-a}$$ 10

যদি সৰলভাৱে সংযুক্ত ক্ষেত্ৰ R ৰ পৰিসীমা C-ৰ ভিতৰত আৰু C-ৰ ওপৰত $f(z)$ বৈশ্লেষিক হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{z-a}$$

8. What is meant by a normal form of a matrix? Find the normal form of the matrix A and hence find its rank, where

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ 2+7+1=10

এটা মৌলকক্ষৰ প্ৰসামান্য আকাৰ মানে কি বুজায় ? A মৌলকক্ষটোৰ প্ৰসামান্য আকাৰ নিৰ্ণয় কৰা আৰু তাৰপৰা A-ৰ কোটি উলিওৱা য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Or/অথবা

State all the conditions under which a matrix is said to be in echelon form. Reduce the following matrix A to echelon form and hence find its rank where 3+6+1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

এটা মৌলকক্ষক ইকেলন আকাৰত থকা বুলি ক'বলৈ প্ৰয়োজনীয় চৰ্তসমূহ উল্লেখ কৰা। নিম্নোক্ত মৌলকক্ষ A-ক ইকেলন আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা আৰু তাৰপৰা A ৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
