Total number of printed pages–11

3 (Sem–6) MAT 2

2020

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6·2

(Advanced Calculus)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following as directed : 1×10=10

তলত দিয়াবোৰৰ নিৰ্দেশানুযায়ী উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) What is the value of $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ৰ মান কি?

Contd.

(b) What is closed set?

বন্ধ সংহতি কাক বোলে?

(c) Give definition of open sphere.

মুক্ত গোলকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) State fundamental theorem of integral calculus.

অনুকলন গণিতৰ মৌলিক প্ৰমেয়টো লিখা।

(e) Define $\Gamma(-n)$ where n is a positive real number.

$\Gamma(-n)$ ৰ সংজ্ঞা দিয়া, য'ত n এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা।

(f) For what values of m and n, the beta function $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ is convergent?

m আৰু n ৰ কি মানৰ বাবে $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ বিটা ফলনটো অভিসাৰী হ'ব?

(g) If $A=(0, 1)$, then $D\ (A)=?$

যদি $A=(0, 1)$, তেন্তে $D\ (A)=?$

(h) Define improper integral.

অপ্ৰকৃত অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(i) Define complete metric space.

পূৰ্ণ দূষিক স্থানৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(j) Write down the relation between Beta function and Gamma function.

বিটা ফলন আৰু গামা ফলনৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Prove that $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\beta(m, n) = \beta(n, m)$।

(b) Give an example each of a complete metric space and an incomplete metric space.

পূৰ্ণ দূষিক স্থান আৰু অপূৰ্ণ দূষিক স্থান প্ৰত্যেকৰে একোটাকৈ উদাহৰণ দিয়া।

(c) Examine the convergence of

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}$$ ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

(d) Show that every open interval in $\mathbb{R}$ is an open set.

দেখুওঁৱা যে $\mathbb{R}$ অত প্ৰত্যেক মুক্ত অন্তৰাল এটা মুক্ত সংহতি।

(e) Evaluate the integral

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} xyz\,dx\,dy\,dz.$$

অনুকলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} xyz\,dx\,dy\,dz$$ ।

3. Solve ***any four*** : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটাৰ সমাধান কৰা ঃ

(a) Prove that every convergent sequence has a unique limit. 5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেকটো অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ এটাহে সীমা বিন্দু থাকে।

(b) Show that the real line is a complete metric space. 5

দেখুওঁৱা যে বাস্তৱ ৰেখাডাল এটা পূৰ্ণ দূৰিক স্থান।

(c) Let $f(x) = k$ (constant).

Prove that f is R-integral and

$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$. 5

ধৰা হ'ল $f(x) = k$ (ধ্ৰুৱক)।

প্ৰমাণ কৰা যে f R-অনুকলনীয় আৰু

$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$।

(d) Show that $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ converges if and only if $n < 1$. Using comparison test, show that $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ is convergent.

3+2=5

দেখুওঁৱা যে $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ অভিসাৰী যদি আৰু

যদিহে $n < 1$ হয়। ৰিজনি পৰীক্ষা প্ৰয়োগ কৰি দেখুওঁৱা

যে $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ অভিসাৰী হয়।

(e) Show that the volume of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ is $\frac{4}{3}\pi abc$. 5

দেখুওঁৱা যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

উপগোলকৰ আয়তন $\frac{4}{3}\pi abc$ ।

(f) Show that a function f continuous in a closed interval $[a, b]$ is Riemann integrable in $[a, b]$. 5

f ফলনটো বন্ধ অন্তৰাল $[a, b]$ অত অবিচ্ছিন্ন হ'লে, দেখুওঁৱা যে f ফলনটো $[a, b]$ অন্তৰালত ৰিমান অনুকলনীয়।

4. Answer [(a) **or** (b)], [(c) **or** (d)], [(e) **or** (f)] and [(g) **or** (h)] : 10×4=40

[(a) বা (b)], [(c) বা (d)], [(e) বা (f)], আৰু [(g) বা (h)]ৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) (i) Let $\mathbb{R}^2$ be the set of all ordered pairs of real numbers and let $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ be defined by

$$d(x, y)=max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

where $x=(x_1, x_2)$ and

$y=(y_1, y_2)\in\mathbb{R}^2$. Show that

$(\mathbb{R}^2, d)$ is a metric space. 5

$\mathbb{R}^2$ সংহতিটো সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যোৰৰ সংহতি আৰু $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ৰ সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেধৰণে

$$d(x, y)=max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

য'ত $x=(x_1, x_2)$ আৰু

$y=(y_1, y_2)\in\mathbb{R}^2$

দেখুওঁৱা যে $(\mathbb{R}^2, d)$ এটা দূৰিক স্থান।

(ii) Prove that every open sphere in a metric space is always an open set. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰিক স্থানত প্ৰতিটো মুক্ত গোলকেই এটা মুক্ত সংহতি।

(b) Prove that

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m > 0, n > 0.$$ 10

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m > 0, n > 0 \text{।}$$

(c) Show that the integral $\int_0^{\pi/2} a \log \sin x \, dx$ is convergent and hence evaluate it. 10

দেখুওঁৱা যে অনুকলন $\int_0^{\pi/2} a \log \sin x \, dx$ অভিসাৰী আৰু ইয়াৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Evaluate $\iiint_T log(x+y+z)dxdydz$

where T denotes the region bounded by $x=0,\ y=0,\ z=0$ and $x+y+z=1$. 10

$\iiint_T log(x+y+z)dxdydz$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

যত T, $x=0,\ y=0,\ z=0$ আৰু $x+y+z=1$ দ্বাৰা সীমিত।

(e) (i) Let (X, d) be a metric space and x, y, z be any three points of X. Then show that

$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$. 5

ধৰা হ'ল (X, d) এটা দূৰিক স্থান আৰু x, y, z Xৰ যিকোনো তিনিটা বিন্দু। তেন্তে দেখুওঁৱা যে

$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$।

(ii) Show that a subset A of a metric space X is closed if and only if $D(A) \subset A$. 5

দেখুওঁৱা যে, X দূৰিক স্থানৰ A উপসংহতিটো বন্ধ যদি আৰু যদিহে $D(A) \subset A$।

(f) Test the convergence : 5+5=10

অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা ঃ

(i) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

(ii) $\int_2^\infty \frac{\cos x}{\log x} dx$

(g) Show that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Hence or otherwise, show that

$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$. 6+4=10

দেখুওঁৱা যে $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ ।

ইয়াৰ সহায়ত বা অন্য প্ৰকাৰে, দেখুওঁৱা যে

$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ ।

(h) Evaluate :

$$\iint_E x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}dx\,dy,\ m\geq 1,\ n\geq 1,\ p\geq 1$$

where E is the region bounded by $x=0$, $y=0$ and $x+y=1$. 10

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\iint_E x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}dx\,dy,\ m\geq 1,\ n\geq 1,\ p\geq 1$$

য'ত E; $x=0$, $y=0$ আৰু $x+y=1$ ৰ দ্বাৰা সীমিত।