

2019

MATHEMATICS

( General )

Paper : 6.2

( Advanced Calculus )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions*

*Answer either in English or in Assamese*

1. Answer the following as directed :  $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়াবোৰৰ নিৰ্দেশানুযায়ী উত্তৰ দিয়া :

(a) If  $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ , find the set of limit points of  $A$  (w.r. to usual metric).

যদি  $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ ,  $A$ -ৰ সীমাবিন্দুৰ সংহতিটো নিৰ্ণয় কৰা (সাধাৰণ দূৰিক সাপেক্ষে)।

(b) Write the value of  $\Gamma(n)$ , where  $n$  is a natural number.

$\Gamma(n)$ -ৰ মান লিখা য'ত  $n$  এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।

- (c) State Bolzano-Weierstrass theorem.  
Bolzano-Weierstrass-ৰ উপপাদ্যটো লিখা।
- (d) Is the set of real numbers w.r. to usual metric complete?  
সাধাৰণ দূৰিক সাপেক্ষে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা পূৰ্ণ দূৰিক স্থান হয়নে ?
- (e) Every continuous function is Riemann integrable.

( Write True or False )

প্রতিটো অবিচ্ছিন্ন ফলন Riemann অনুকলনীয়।

( সঁচা নে মিছা লিখা )

- (f) Express beta function  $B(l, m)$  mathematically.  
বিটা ফলন  $B(l, m)$ -ক গাণিতিকভাৱে প্ৰকাশ কৰা।
- (g) Give an example of an improper integral of first kind.  
এটা প্ৰথম প্ৰকাৰৰ অপ্ৰকৃত অনুকলনৰ উদাহৰণ দিয়া।
- (h) Define open set.  
মুক্ত সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা।
- (i) Write definition of Cauchy sequence.  
কশ্চি অণুক্ৰমৰ সংজ্ঞা লিখা।
- (j) When an integral is said to be improper?  
এটা অনুকলনক কেতিয়া অপ্ৰকৃত বুলি কোৱা হ'ব ?

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Let  $d: R \times R \rightarrow R$  be defined by  $d(x, y) = |x - y|$ . Show that  $d$  is a metric on  $R$ ,  $x, y \in R$ .

ধৰা হ'ল  $d: R \times R \rightarrow R$  ফলনটোৰ সংজ্ঞা এনেধৰণে দিয়া আছে  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $x, y \in R$ . দেখুওৱা যে  $d$ ,  $R$ -ত এটা দূৰিক।

(b) Evaluate upper Riemann sum for the function  $f(x) = C$ , where  $C$  is a constant.

$f(x) = C$  ফলনটোৰ উৰ্ধ বাইমান যোগফল উলিওৱা য'ত  $C$  এটা ধ্ৰুৱক।

(c) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y) \, dx \, dy$$

(d) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\Gamma(n) = (n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} \, dx$$

(e) Show that  $X$  is an open set, where  $(X, d)$  is a metric space.

দেখুওৱা যে  $(X, d)$  দূৰিক স্থানত  $X$  এটা মুক্ত সংহতি।

3. Solve any *four* of the following : 5×4=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ সমাধান কৰা :

(a) Give an example of an incomplete metric space with justification.

যুক্তি সহকাৰে এটা অপূৰ্ণ দূৰিক স্থানৰ উদাহৰণ দিয়া।

(b) In a metric space, show that every open sphere is an open set.

এটা দূৰিক স্থানত, দেখুওৱা যে, প্ৰত্যেক মুক্ত গোলক এটা মুক্ত সংহতি।

(c) Examine the convergence of the following integral :

তলৰ অনুকলনটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1-x)^{1/3}}$$

(d) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^{\bar{b}} f dx$$

(e) Evaluate  $\iiint e^{x+y+z} dx dy dz$  over the positive octant such that  $x+y+z \leq 1$ .

ধনাত্মক চোকত  $\iiint e^{x+y+z} dx dy dz$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'তে  $x+y+z \leq 1$ .

4. Solve any *two* of the following : 10×2=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(a) (i) Show that in a metric space, every convergent sequence is a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে, এটা দূৰিক স্থানত প্রতিটো অভিসাৰী অণুক্ৰম একোটা কশি অণুক্ৰম।

(ii) If  $f(x) = x^2 \forall x \in [0, a]$ , find  $L(p, f)$ .

যদি  $f(x) = x^2 \forall x \in [0, a]$ ,  $L(p, f)$  নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Test convergence for the following integrals :

তলত অনুকলনবোৰৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

(i)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{1+x^2}$

(ii)  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$

(c) (i) If  $f \in R[a, b]$ , show that  $f^2 \in R[a, b]$ .

যদি  $f \in R[a, b]$ , দেখুওৱা যে  $f^2 \in R[a, b]$ .

(ii) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dy \right] dx$$

5. Solve any two of the following : 10×2=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(a) (i) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1), \quad m > 0, n > 0$$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$B(l, m) = \int_0^{\infty} \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}} dx$$

(b) (i) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$

converges (অভিসাৰী).

(ii) Let  $f$  be a continuous function defined on  $[a, b]$  and  $f \in R[a, b]$ . Prove that for some  $c \in [a, b]$ ,

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f(c)$$

ধৰা হ'ল  $[a, b]$  অন্তৰালত  $f$  এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু  $f \in R[a, b]$ . কোনো এটা বিন্দু  $c \in [a, b]$ -ৰ বাবে দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f(c)$$

(c) (i) Evaluate (মান নির্ণয় করা)

$$\iiint_R (x+y+z+1)^2 dx dy dz$$

where  $R$  is the region bounded by  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $x+y+z \leq 1$ .

য'ত  $R$ , ক্ষেত্র  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $x+y+z \leq 1$ -ৰ দ্বাৰা সীমিত।

(ii) Prove that (প্রমাণ করা যে)

$$\iiint_R (x+y+z) dx dy dz = \frac{9}{2}$$

where (য'ত)

$$R : 0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2; 2 \leq z \leq 3$$

\*\*\*